

$$B_n := \{x \in X : f(x) \geq n\},$$

$$A_{n,k} := \left\{x \in X : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n}\right\}.$$

Offenbar : $B_n, A_{n,k} \in \mathcal{M}_\lambda$

Sei weiter

$$f_n(x) := n \chi_{B_n}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{n \cdot 2^k}{2^k} \chi_{A_{n,k}}(x)$$

$\Rightarrow f_n$ λ -messbar, einfach
und ≥ 0

Nun rechne nach:

-289-

$$(1) \quad f_n(x) \leq n \quad \forall x \in X, n \in \mathbb{N}$$

(Fallunterscheidung $f(x) \geq n, f(x) < n$)

$$(2) \quad f_n \leq f_{n+1}, \quad f_n \leq f,$$

$$(3) \quad 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq 2^{-n}, \quad x \notin \underline{\underline{B_n}}.$$

Ist also f beschränkt, etwa $f \leq n_0$
 für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so folgt $B_n = \emptyset$ für
 $n > n_0$, also $f_n \xrightarrow{\quad} f$ auf X nach (3).

Hat f beliebiges Vorzeichen, so zerlege

$$f = f^+ - f^-$$

und argumentiere für $f^\pm$.



§ 25 (Lebesgue) Integration -290-

Definition von $\int f d\lambda$ mit dem
X

Ziel

- $\int_a^b f(t) dt$ für Regelfunktionen
- Volumen und Oberflächenintegrale
- unendliche Reihen

als Spezialfälle zu erhalten.

Treppenfunktionen (& Integral)

Def 25.1 : Sei λ ein Maß auf der
Menge X .

a) $f : X \rightarrow \underline{\underline{\mathbb{R}}}$

heißt λ -Treppenfunktion

: $\iff f$ ist λ -messbar und
 nimmt nur abzählbar viele
(reelle!) Werte an

$\mathcal{J} :=$ Menge aller λ -Treppenfunktionen
 (genauer: $\mathcal{J}_\lambda$)

b) Für $g \in \mathcal{J}$, $g \geq 0$, sei



" λ -Integral"
 für $g \geq 0$

$$\int_X g d\lambda := \sum_{y \in [0, \infty)} y \cdot \lambda(g^{-1}(\{y\}))$$

mit der Vereinbarung $0 \cdot \infty = 0$.

Es gilt: $\int_X g d\lambda \in [0, \infty]$.

$$b) \left\{ \begin{array}{l} f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ einfach} \\ \Rightarrow f \in \mathcal{I} \end{array} \right. \quad -292-$$

Kommentare:

1) Treppenfunktionen sind per Def. $\mathbb{R}$ -wertig, da dann

$$\alpha f + \beta g \in \mathcal{I}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, f, g \in \mathcal{I}.$$

$$2) A \in \mathcal{M}_\lambda \Rightarrow \chi_A \in \mathcal{I} \text{ und}$$

$$\int_X \chi_A d\lambda = \lambda(A).$$

3) Sei $g \in \mathcal{I}, g \geq 0$. Schreibt man die Funktionswerte von g in der Form

$$\alpha_i \in [0, \infty), i \in I,$$

mit Indexmenge $I \subset \mathbb{N}$, so ist -293-

$$g(x) = \sum_{i \in I} \alpha_i \chi_{A_i}(x),$$

$$A_i := g^{-1}(\alpha_i), \quad \text{und}$$

$$\int_X g d\lambda = \sum_{i \in I} \alpha_i \lambda(A_i)$$

4) Erklärung der Konvention $0 \cdot \infty = 0$:

"Ist $g \equiv 0$ auf einer Menge mit Maß ∞ , so liefert diese Menge anschaulich keinen Beitrag zum Integral."

Beispiele:

$$1.) \int_{\mathbb{R}} \chi_{\mathbb{Q}} d\mathcal{L}^1 = 0$$

beachte: χ_Q ist $\mathcal{L}^1$ -Treppenfunktion -294-

mit den Werten 0 und 1; da χ_Q aber keine Regelfunktion ist, macht $\int_a^b \chi_Q(t) dt$ keinen Sinn!

2.) Sei $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[0, \infty)$.

Man setzt

$$g: \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty), g(n) := \alpha_n,$$

und betrachtet auf $\mathbb{N}$ das (Zahl -)

$$\text{Maß} \quad \lambda := \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n,$$

$$\delta_n(A) := \begin{cases} 1, & n \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad A \subset \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{N}} g d\lambda =$$

$$\sum_{y \in [0, \infty)} y \lambda(\bar{g}^{-1}(y)) =$$

$$\sum_{y \in [0, \infty)} y \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(\bar{g}^{-1}(y)) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{y \in [0, \infty)} y \underbrace{\delta_n(\{m \in \mathbb{N} : g(m) = y\})}_{= \begin{cases} 0, & \text{wenn } y \neq \alpha_n \\ 1, & \text{wenn } y = \alpha_n \end{cases}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.$$

Also ergibt sich $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \in [0, \infty]$
als Integral von g bzgl. des Zahl-
Maßes auf $\mathbb{N}$.

Def 25.2 : (λ - Integral für
Treppenfunktionen mit beliebigem
Vorzeichen)

Sei $g: X \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ eine λ - Treppenfunktion mit

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \int_X g^+ d\lambda < \infty \quad \underline{\text{oder}} \\ \int_X g^- d\lambda < \infty, \quad g = g^+ - g^- \end{array} \right.$$

Dann heißt g λ - integrierbar
mit λ - Integral

$$\int_X g d\lambda := \int_X g^+ d\lambda - \int_X g^- d\lambda \in \underline{\mathbb{R}}.$$

-297-

Bem: 1.) $g \in \mathcal{I} \Rightarrow g^{\pm} \in \mathcal{I}$,

d.h. $\int_X g^{\pm} d\lambda$ existiert in $[0, \infty]$.

2.) Forderung $\circledast$ ist nötig, damit
 $\int_X g^+ d\lambda - \int_X g^- d\lambda$ in $\overline{\mathbb{R}}$ wohl-
definiert ist.

3.) λ -Integrabilität bedeutet nicht
 $\int_X g d\lambda \in \mathbb{R}$!

Den folgenden Satz zeige man zur
Übung selbst:

Satz 25.1 : Seien $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$

λ -Treppenfunktionen und $\alpha, \pm \in \mathbb{R}$.

Sind f, g λ -integrierbar,
so auch $\alpha f + \pm g$ mit

$$\int_X (\alpha f + \pm g) d\lambda = \alpha \int_X f d\lambda + \pm \int_X g d\lambda,$$

Vorausgesetzt rechts trifft kein unde-
finierter Ausdruck auf.

Das ist insbesondere dann der Fall,

Wenn

$$\int_X f d\lambda, \int_X g d\lambda \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$$

gilt.

Def 25.3 : λ -Integral messbarer
Funktionen

Sei λ ein Maß auf X und $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
eine λ -messbare Funktion.

i) Das λ -Oberintegral von f ist

$$(\overline{\mathbb{R}} \ni) \int_X^* f d\lambda := \underline{\inf}_X \left\{ \int_X g d\lambda : g \text{ } \lambda\text{-integrierbare T.F. mit } (g \geq f) \text{ } \lambda\text{-f.ü.} \right\}$$

Ist $f = +\infty$ auf einer Menge mit
 $\lambda \text{ Maß} > 0$, so gibt es kein $g \in \mathcal{I}$
mit $g \geq f$ λ -f.ü. Dann sei

$$\int_X^* f d\lambda := +\infty \quad (= \inf \emptyset).$$

ii) Das λ -Unterintegral

$$\overline{\mathbb{R}} \ni \int_{\ast} f d\lambda := \sup \left\{ \dots \dots \dots \underbrace{g \leq f \text{ f.ü.}}_{\text{mit } \text{Maß} > 0} \right\}$$

($:= -\infty$, falls $f = -\infty$ auf einer Menge)

iii) f heißt λ -integrierbar

$$: \Leftrightarrow \int_{\ast} \dots = \int_{\ast} \dots \quad (\text{in } \overline{\mathbb{R}});$$

gemeinsamer Wert: das λ -Integral
von f , $\int_{\ast} f d\lambda, \int f d\lambda, \dots$

iv) f heißt λ -summierbar: $\Leftrightarrow$

f λ -integrierbar und $\int_{\ast} f d\lambda \in \underline{\underline{\mathbb{R}}}$